Μάθημα 29ο

• Η συνάρτηση Lagrange σε δύο ανεξάρτητες μεταβ.

Θεωρούμε R ένα κλειστό χωρίο στο επίπεδο xy και συναρτήσεις $u=u(x,y)\in C^2(R)$ (συνεχείς με συνεχείς δεύτερες παραγώγους) και έστω Γ το σύνορο του R.

Ζητάμε τα ακρότατα του ολοκληρώματος

$$J=\iint_R f(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy$$

όπου $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$

Στο συγκεκριμένο συναρτησοειδές η εξαρτημένη μεταβλητή $u=u(x,y)$ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και εμπλέκονται οι δύο πρώτες παράγωγοι της προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Όπως και στην περίπτωση του $J=\int f(x,u,u')\,dx$

θεωρώ $u=u(x,y,a)=u(x,y,0)+a\eta(x,y)$

όπου $\eta(x,y)\in C^2(R)$ με $\eta=0$ στο Γ.

Δημιουργώ τη παράγωγο/διαφορά:

$$\delta I = \frac{dI}{da} = \frac{d}{da}\iint_R f(u,u_x,u_y)\underbrace{dx\,dy}_{dA} = \iint_R \frac{\partial f}{\partial a}\,dx\,dy$$

$$\frac{df}{da} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\partial u_x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial u_y}\frac{\partial u_y}{\partial a} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \delta I = \iint_R \left(u\frac{\partial f}{\partial u} + \underline{\underline{u_x\frac{\partial f}{\partial u_x}}} + \underline{\underline{u_y\frac{\partial f}{\partial u_y}}} \right) dx\,dy$$

Παρατήρηση

Προσοχή! Δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω παραγοντική ολοκλήρωση σε αυτό το σημείο εδώ.

Όμως:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial u_x}\right) = \underline{\underline{u_x\dfrac{\partial f}{\partial u_x}}} + u\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial u_x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial u_y}\right) = \underline{\underline{u_y\dfrac{\partial f}{\partial u_y}}} + u\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial u_y} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} u_x\dfrac{\partial f}{\partial u_x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial u_x}\right) - u\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial u_x} \\ \\ u_y\dfrac{\partial f}{\partial u_y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial f}{\partial u_y}\right) - u\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial u_y} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα

$$\delta J = \iint_R \Big[u \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - u \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial f}{\partial u_y}\right) - u \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y}\Big] dx\,dy$$

$$= \iint_R u\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y}\right) dx\,dy + \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial f}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right] dx\,dy$$

• Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώ το Θεώρημα Green:

<u>Θεώρημα Green</u>:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$

<u>Οπότε</u>:

$$Q = u\frac{\partial f}{\partial u_x}, \quad P = -u\frac{\partial f}{\partial u_y}$$

Αυτόθι το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\Gamma \left(-u \frac{\partial f}{\partial u_y}\,dx + u \frac{\partial f}{\partial u_x}\,dy\right) = 0$$

↳ Αφού στο Γ $u=0$

Ζητάμε τα ακρότατα του συναρτησοειδούς J δηλαδή τις τιμές για τις οποίες:

$$\delta J = \frac{dJ}{da} = 0$$

$$\Longrightarrow \iint_R u\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y}\right) dx\,dy = 0, \quad \forall u$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} = 0}$$

Θεώρημα Green: $Q=x$, $P=0$

$$\boxed{\iint_R dx\,dy = \oint_\Gamma x\,dy}$$

$Q=0$, $P=y$

$$\boxed{-\iint_R dx\,dy = \oint_\Gamma y\,dx}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \iint_R dx\,dy = \oint_\Gamma x\,dy \\ A &= -\oint_\Gamma y\,dy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}\oint_\Gamma (x\,dy - y\,dx)}$$

Πότε χρησιμοποιούμε αυτό το τύπο?

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτό το αποτέλεσμα όταν έχω καμπύλες ορισμένες παραμετρικώς.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το εμβαδό μιας καμπύλης που περιγράφεται: $x=x(t)$, $y=y(t)$

Ο μοναδιαίος κύκλος: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

$$\int_{\Gamma} x\,dy = \int_0^{2\pi} \cos t \cos t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$$

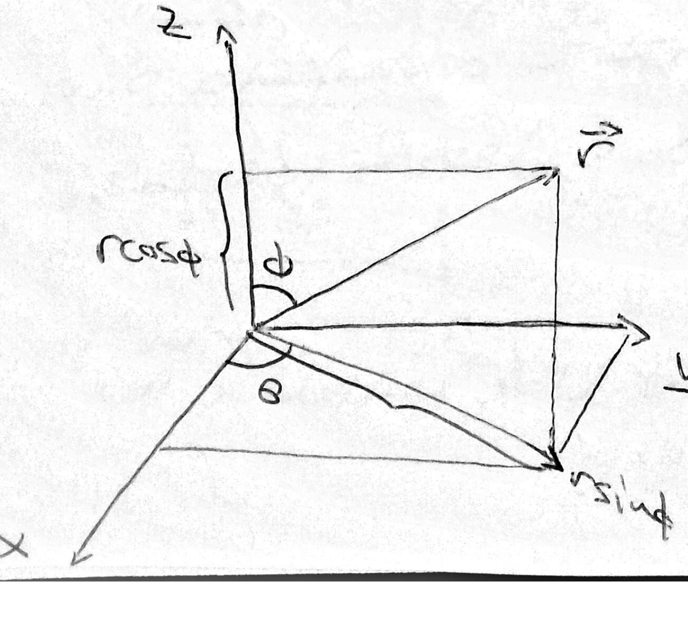
$$\int_{\Gamma} y\,dx = \int_0^{2\pi} \sin t(-\sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

Άσκηση

Ένα υλικό σημείο μάζας m κινείται στο χώρο ($\mathbb{R}^3$) κάτω από ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων $F(r) = -\frac{dV}{dr}$.
Να βρεθεί η συνάρτηση Lagrange σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Λύση



$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Έλεγχος: $x^2+y^2+z^2 = r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi = r^2$

Η συνάρτηση Lagrange θα είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - V(r)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\theta\sin\phi) = \dot{r}\cos\theta\sin\phi - r\sin\theta\dot{\theta}\cos\phi + r\cos\theta\cos\phi\dot{\phi}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r\sin\theta\sin\phi) = \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\dot{\theta}\sin\phi + r\sin\theta\cos\phi\dot{\phi}$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\phi) = \dot{r}\cos\phi + (-r\sin\phi\dot{\phi}) = \dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\dot{\phi}$$

<u>Οπότε:</u>

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\phi\,\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\phi\,\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)$$

Η εξίσωση Euler θα είναι:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m(2r\sin^2\phi\,\dot{\theta}^2 + 2r\dot{\phi}^2) - \frac{dV}{dr} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m2\dot{r}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{r} = m(r\sin^2\phi\,\dot{\theta}^2 + r\dot{\phi}^2) - \frac{dV}{dr}}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0} \Rightarrow 0 - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

Άρα το πρώτο ολοκλήρωμα σταθερά της κίνησης μ

είναι $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = C \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} m r^2 \sin^2\phi \cancel{2}\dot{\theta} = C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r^2\sin^2\phi\,\dot{\theta} = \frac{C}{m} = \tilde{C}}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}(r^2\cancel{2}\sin\phi\cos\phi\,\dot{\theta}^2) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}r^2\cancel{2}\dot{\phi}\right) = 0$$

$$\Rightarrow r^2\sin\phi\cos\phi\,\dot{\theta}^2 - \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$$

$$\Rightarrow r^2\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} = r^2\sin\phi\cos\phi\,\dot{\theta}^2$$

Άσκηση 1

Να μετατρέψετε το νόμο διατήρησης $r^2 \sin^2\phi \, \dot{\theta} = C$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

↳ Αρχή διατήρησης της στροφορμής

Άσκηση 2

Ν.δ.ο η ποσότητα $H=T+V$ είναι σταθερή.

Άσκηση 3 (*)

Να επαναλάβετε τη διαδικασία σε πολικές συντεταγμένες και να δείξετε την ισοδυναμία με τους νόμους του Νεύτωνα. Από τα αποτελέσματά σας να βρείτε τη κεντρομόλο και την επιτρόχιο επιτάχυνση.